



TITLE:

双対グラフによる j -記号の間の
関係式の解釈について (j -
symbolから導かれる位相的量子場
の理論の研究)

AUTHOR(S):

小須田, 雅; 中坊, 滋一

CITATION:

小須田, 雅 ...[et al]. 双対グラフによる j -記号の間の関係式の解釈について (j -symbolから導かれる位相的量子場の理論の研究). 数理解析研究所講究録 1998, 1053: 41-62

ISSUE DATE:

1998-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62270>

RIGHT:

双対グラフによる $6j$ -記号の間の関係式の解釈について

琉大 数理 小須田 雅 (Masashi Kosuda)

久留米高専 中坊 滋一 (Shigekazu Nakabo)

1 はじめに

Turaev-Viroによる3次元多様体の不変量の定義[4]は、多様体を3角形分割(実際は4面体分割)し、その各単体に置くことのできる可能なカラーの組み合わせすべてを考えることから始まる。Turaev-Viro-Ocneanu不変量においては、さらに3角形分割の各面に対して、インタートワイナー空間の基底をなす元を与えることになる。 E_6 のセクターから得られる fusion rule 代数とインタートワイナー空間に対して、Izumiの与えた基底[3]は、Evans-Kawahigashiの本[2]での4面体 τ に与える $6j$ -記号 $Z(\tau)$ を計算するのに都合がよいものであるが、それでもなお、定義に基づいた不変量の計算は、分割に必要な4面体の数が数個増えただけでも、考えなければならないカラーの組み合わせが膨大な数になるため、鈴木[6]の計算例からわかるように、実際の計算は、著しく困難である。

一方、葉広は E_6 のセクターから決まる fusion rule 代数の性質をもとに、独自に $6j$ -記号の間の関係式を導き出し、その関係式を用いて、ハンドル分解に与えられたデータから3次元多様体の不変量を計算する方法を構成した。この方法の正当性については未だ証明が与えられていないが、岡本-佐藤[5]がいくつかの例について計算を試みており、その結果は、鈴木が定義に基づき3角形分割にカラーを与えて計算したもの[6]と一致している。

当初の研究の目標は、葉広の計算方法の正当性についての証明を与えることであつたが、いくつか難点があり、完全な証明までは至らなかった。議論を難しくしているのは、Turaev-Viro-Ocneanuの不変量にはカラー付けの段階で、各面にインタートワイナー空間の基底をなす元を与

えるという操作が加わっているため、基底の選び方という自由度が生じていることと、インタートワイナー空間を与える3角形の回りの辺の向きで決まる自己同型の決定という問題が加わっている点である。

そこで、今回の報告では、Izumiが採用したインタートワイナー空間の基底の変換を行うことにより、葉広の導いた $6j$ -記号の間の関係式の大部分が、Evans-Kawahigashi の本で定義された $6j$ -記号で解釈出来ることを示し、葉広の計算方法の正当性の「状況証拠」を与えることにする。今回示せなかった事柄については、最後の節(4節)で研究課題としてまとめた。

2 境界付き多様体の不変量とハンドル分解

3角形分割可能な3次元多様体は、2つのハンドル体を貼り合わせるにより得られる。和久井の報告[7]にあるように、ハンドル体を境界付きの3次元多様体とみなせば、その上のカラー(インタートワイナー空間の基底をなす元を与えることもカラー付けに含める)を固定することにより、その不変量が得られる。これからもとの3次元多様体を求めるためには、やはり境界のカラーをすべて動かして和を取るという計算が必要であるが、ハンドル体の種数を減らし、境界に与えられる3角形の数を減らすことが出来れば、この計算は現実に行なえるようになる。

実際には、ハンドル分解の種数の下限は決まっているが、その場合でも、1つ種数の少ないハンドル体の不変量との間の関係式が得られれば、繰り返すにより、最後には、球体の不変量を考えるだけでよくなる。

境界面上の3角形についても同様にその総数を減らすことができる。実際には3角形分割にはならないようなグラフであっても、3角形分割を与えるグラフの不変量との間に関係式を見出し、そのグラフに形式的に値を与えることが出来るのであれば、最後には、たった1つの3角形のカラーを考えることで、不変量を計算することが出来る。今の議論を3角形分割のかわりにその双対グラフを考えると、これは trivalent グラフになるが、この頂点を減らしていくことができれば、輪で表されるグラフとの間の関係式が得られる。そこで、単独のカラーがのった輪で表されるグラフの値をすべてのカラーについて決めることが出来れば、1つも辺のない空グラフのスカラー倍という量が求まるので、カラーを動かしてその和を求めるという計算は不要になる。葉広の導いた関係式は、双対グラフを用いて、実際、上記の事が可能であることを示している。(具

体的な計算方法については、岡本—佐藤の報告 [5] を参照)

双対グラフの間の関係式は、境界付きの 3 次元多様体の不変量の公式から位相的量子場の理論を構成し、これから求める方法 (例えば, Degiovanni[1]) があるが、ある種の関係式については、以下のように境界付きの 3 次元多様体の不変量の公式から直接導くこともできる。今回は、以下の操作で得られる関係式のみを考察する。

2.1 境界付きの 3 次元多様体の不変量

3 角形分割 T の与えられた境界付きの 3 次元多様体の不変量 $Z_\phi(P, T)$ は、和久井の報告 [7] や Evans-Kawahigashi [2] に詳述してあるように次のように定義される。

$$Z_\phi(P, T) = w^{-a-a'/2} \sum_{c \in C_\phi} \sum_{d \in C_f^\phi(c)} [c]^{1/2} Z(d). \quad (1)$$

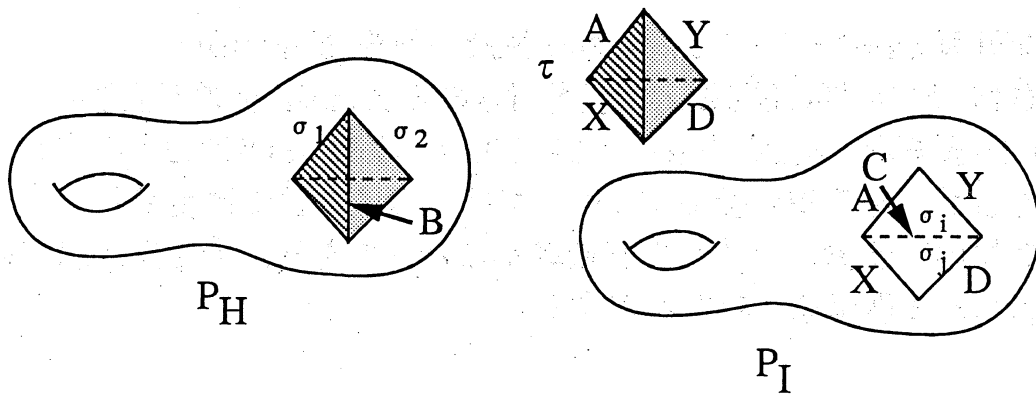
式中の $[c]$ は 3 角形分割の各辺に与えられたカラーの大きさの積であるが、境界の上の辺については、その正の平方根を取ってから掛け合わせる。 E_6 の $6j$ -記号では、カラー $1, \alpha, \rho$ の大きさは、それぞれ $\mu(1) = 1, \mu(\alpha) = 1, \mu(\rho) = \mu = 1 + \sqrt{3}$ である。カラーの大きさの定義についてのみ Evans-Kawahigashi の本 [2] と流儀が異なるので注意されたい。その他の記号は、Evans-Kawahigashi の本と全く同じで、 a は境界付き 3 次元多様体の内部の 3 角形の頂点数で、 a' は境界面上の頂点の総数である。 $Z(d)$ は 3 角形分割に現れるすべての 4 面体の $6j$ -記号の積である。

さて、 $Z_\phi(P, T)$ の値は、境界の分割やその分割に基づく (インタートワイナーの基底を与える操作を含む) カラーの割り当て ϕ に依存しているわけであるが、 $Z_\phi(P, T)$ は境界の情報のみによって決まり、内部の 3 角形分割にはよらないことがわかっている。我々はこの事実を用いて葉広の $6j$ -記号の間の関係式を導き出す。

そのために考えるのが、ハンドル体と 4 面体の貼り合わせである。

2.2 $6j$ -記号の間の関係式

図 1 の右側のハンドル体 P_I には 3 角形分割が与えられ、各辺にはカラーが、各面にはインタートワイナーが与えられているものとする。ハンドル体の表面から、隣接する 1 組の 3 角形を図の点線に沿って凹ませ、

図 1: ハンドル体 I と H

その凹みに 4 面体 τ を貼り付けて図 1 の左側のハンドル体 P_H を作ることを考える.

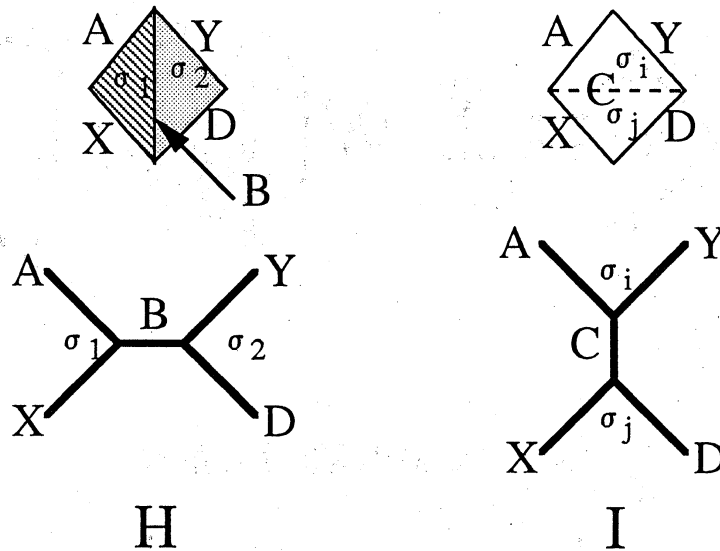
新しいハンドル体 P_H の不変量を元のハンドル体 P_I の不変量を用いて表すとどうなるかを考えよう. 4 面体 τ を貼り付けられる P_I の表面の 2 つの 3 角形が共有する辺を C とし, その 2 つの 3 角形に与えられるインタートワイナー空間の元をそれぞれ σ_i, σ_j とする. その他の辺や 3 角形のカラーの割り当てを 1 つ固定し, それを ϕ と置く. このような色付けのときに式 (1) によって定まる不変量を $Z_{\phi, C, \sigma_i, \sigma_j}(P_I)$ と置く.

次に, P_H について考える. P_H の 3 角形分割は, P_I の 3 角形分割と, 付け加えられた 4 面体 τ により与えられるものとする. (境界付き多様体の不変量は, 内部の 3 角形分割に依存しないことから, このように特別な 3 角形分割を考えてもよい.) また, P_H の各辺と各面のカラーは P_I に与えたカラー ϕ と 4 面体 τ のカラーで決まるものとする. τ の奥の 2 つの面とその間の辺は, P_I と共有されているので, そのカラーは, σ_i, σ_j, C となる. (辺や面の名前とその上のカラーを同じ名前と呼ぶが, 混乱はないであろう.) また, τ の手前の 2 つの面とその間の辺のカラーを σ_1, σ_2, B とおき, ハンドル体 P_H の不変量を $Z_{\phi, B, \sigma_1, \sigma_2}(P_H)$ とおく. さらに, 4 面体 τ の $6j$ -記号を

$$Z(\tau) = Z(A, B, C, D, X, Y | \sigma_1, \sigma_2, \sigma_i, \sigma_j)$$

で表し, 境界付き多様体の不変量の式 (1) に当てはめると次の式が得られる.

$$Z_{\phi, B, \sigma_1, \sigma_2}(P_H) = \sum_{C, \sigma_i, \sigma_j} \sqrt{\mu(B)\mu(C)} Z(\tau) \cdot Z_{\phi, C, \sigma_i, \sigma_j}(P_I) \quad (2)$$

図 2: P_H と P_I の双対グラフ

($Z(\tau)$ も C, σ_i, σ_j が動くとともに、その値が変化することに注意.) P_H と P_I では内部も境界面上も頂点の数は同じなので、式(1)での $w^{a-a'/2}$ の項は両辺等しい. また、 P_H に付け加えられた4面体の $6j$ -記号にあたる部分が $Z(\tau)$ である. P_I の境界面上にあった辺のカラー C は内部の辺になったことと、新しく境界の辺に与えられたカラーを B と置いたことから、その大きさの平方根 $\sqrt{\mu(B)\mu(C)}$ が右辺に掛けられている. $\sqrt{\mu(B)\mu(C)}Z(\tau)$ は Evans-Kawahigashi の $6j$ -記号の正規化前の値 $W(\tau)$ に等しいことに注意すると、上の式は、

$$Z_{\phi, B, \sigma_1, \sigma_2}(P_H) = \sum_{C, \sigma_i, \sigma_j} W(\tau) \cdot Z_{\phi, C, \sigma_i, \sigma_j}(P_I) \quad (3)$$

と書ける.

2.3 双対グラフによる書きかえ

$Z(P_H)$, $Z(P_I)$ の関係式を双対グラフで表してみよう. 双対グラフでは、境界面上の3角形分割は trivalent グラフになる. 付け加えられた4面体以外の色付け ϕ は、固定されているので省略して書くことにすると、4面体の貼り付けの前後での双対グラフの変化は、図2の右と左でそれぞれ表される. 上記の式は、この trivalent グラフの局所的な変型に関する関係式を与えていて、その係数は、図2の左のグラフ H で表される2

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \sigma_1 \\ \text{X} \end{array} \text{B} \begin{array}{c} \text{Y} \\ \sigma_2 \\ \text{D} \end{array} = \sum_{C, \sigma_i, \sigma_j} W \left(\begin{array}{c} \sigma_1 \quad \sigma_2 \\ \text{A} \quad \text{Y} \\ \text{X} \quad \text{D} \\ \text{B} \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{A} \\ \sigma_i \\ \text{X} \end{array} \text{C} \begin{array}{c} \text{Y} \\ \sigma_j \\ \text{D} \end{array}$$

H I

図 3: 式(3)の図による解釈

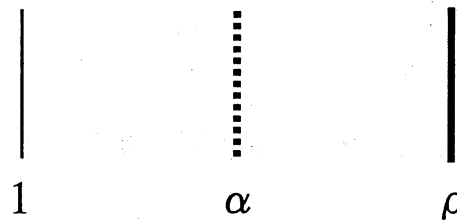


図 4: カラーの表し方

枚の 3 角形と、右のグラフ I で表される 2 枚の 3 角形の辺を貼り合わせて出来る 4 面体の（正規化前の） $6j$ -記号 $W(A, B, C, D, X, Y | \sigma_1, \sigma_2, \sigma_i, \sigma_j)$ の値に等しいことを示している。次の節で我々は、Izumi のデータを元に Evans-Kawahigashi の本 [2] による定義で計算された値を適用した結果が、葉広の関係式を導くことを示す。¹

3 $6j$ -記号の間関係式

図 4 のように各辺に与えられたカラーが ρ ならば実線， α ならば破線，1 ならば細線で表すことにして， $6j$ -記号の間関係式をみってみる。

3.1 インタートワイナー空間を含まない場合

始めに、インタートワイナー空間を含まない場合を考えよう。和久井の報告 [7] にあるように、この場合、4 面体 τ のどの面もその回りの辺に

¹ただし、以下の議論では 4 面体，その双対グラフとも，辺の向きという情報が落ちている。葉広の関係式を完全に説明するには、この情報が必要となる。

1 または α のカラーの付いた辺を少なくとも 1 つ含む. このとき, 頂点に付けられるカラーは一意に決まるので, 貼り付ける 4 面体 τ の $6j$ -記号の値が一意に定まる. 図 5 と図 6 は 4 面体のどの面もインタートワイナー空間を含まないようなすべての場合について (正規化前の) $6j$ -記号の値 $W(\tau)$ を書き出したものである. 図 3 の関係式の左辺の H 型グラフおよび, H 型グラフと τ から決まるに右辺の I 型グラフを $W(\tau)$ の横に記してある. 図 3 は左側の H 型の $6j$ -記号を右側の I 形の $6j$ -記号の 1 次結合で表したときの係数が 4 面体の (正規化前の) $6j$ -記号 $W(\tau)$ に等しいことを主張しているが, 図 5 と図 6 の枠で囲まれた値を岡本-佐藤の計算の定義式と比較してみると一致していることがわかる.

また, 枠で囲まれていない部分に注目すると次のことがわかる.

- 正規化前の $6j$ 図形の値は 1 である.
- 図 3 の式を当てはめると, 右辺には 1 つの項しか現れない.
- 1 のカラーが付いた辺とその端点にあたる頂点を無視すると, 左の H 型と右の I 型は全同位なグラフである.

葉広の計算法においては, 1 のカラーの付いた辺は無視してよいことになっており, 上記の事実からも, それが説明できる.

3.2 インタートワイナー空間を含む場合

E_6 から作られる $6j$ -記号が, インタートワイナー空間を含む (インタートワイナー空間が 2 次元以上になる) のは, 3 角形の 3 辺に与えられた 3 つのカラーが, すべて ρ となる面を 4 面体を含むときであり, 特にこの場合, インタートワイナー空間は 2 次元である. (双対グラフの場合は, 入り込む 3 本の辺のカラーがすべて ρ となるような頂点を含むときである.)

このとき, Izumi[3] の基底 $\{S_3, S_4\}$ を用いて正規化前の $6j$ -記号 $W(\tau)$ を計算しても, 葉広の関係式は得られない. この原因の 1 つに, $6j$ -記号の値が, インタートワイナー空間の基底の選び方に依存しており, 葉広の用いたものと異なることがあげられる.

そこで, インタートワイナー空間の基底を取り直すことで, この場合にも関係式の一部が説明出来ることを示そう. (基底の変換を行っても, なお説明出来ない関係式が存在する. これは, インタートワイナー空間の

「向き」に関する問題であるが、この議論については、最後に研究課題としてまとめてある.)

新しい基底 $\{T_3, T_4\}$ は、次のように定義する.

$$(T_3 \ T_4) = (S_3 \ S_4) \begin{pmatrix} \frac{-e^{7\pi i/12}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{-e^{7\pi i/12}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ \frac{e^{7\pi i/12}-\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{e^{7\pi i/12}-\sqrt{2}e^{2\pi i/3}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \end{pmatrix}$$

上記のように置く理由については後述するので、取り敢えずは上記の変換でインタートワイナー空間を含む場合の $6j$ -記号の値について計算を行ってみる.

まず、上記の変換はユニタリ行列になるように決めてあるので、

$$T_3^* T_3 = T_4^* T_4 = 1, \quad T_3^* T_4 = T_4^* T_3 = 0$$

であることに注意する. 次に、Izumi の論文の $U, \rho(U), \alpha(S_3), \alpha(S_4)$ をそれぞれ、 T_3, T_4 を使って書き直すと次のようになる.

$$U = S_1 S_1^* - S_2 S_2^* + \frac{1}{\sqrt{3}}(-T_3 T_3^* + T_4 T_4^*) \\ + \frac{1}{\sqrt{6}}(e^{2\pi i/3} T_3 T_4^* + e^{-2\pi i/3} T_4 T_3^*),$$

$$\rho(U) = S_1 S_2^* + S_2 S_1^* - \frac{1}{\sqrt{3}}(T_3 U T_3^* - T_4 U T_4^*) \\ + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{\pi i/3} T_3 U T_4^* + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{-\pi i/3} T_4 U T_3^*,$$

$$(\alpha(T_3) \ \alpha(T_4)) = (T_3 \ T_4) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

この値のもとで計算した $6j$ -記号の値を図7, 図8 及び, 図9に示す. 計算方法は、和久井 [7] の報告で記されているものを適用すればよいが、確認のために、④と⑦の場合の計算例を示す.

3.2.1 $6j$ -記号の計算例 (その1)

始めに、④の場合、即ち、

$$W(\tau_4) = W(\rho, \alpha, \rho, \rho, \rho, \rho | S_2, 1, T_i, T_j)$$

の場合をしてみる．先程の底の変換行列 $R = (r_{ij})$ を次のようにおく．

$$R = \begin{pmatrix} r_{33} & r_{34} \\ r_{43} & r_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-e^{7\pi i/12}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{-e^{7\pi i/12}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ \frac{e^{7\pi i/12}-\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{e^{7\pi i/12}-\sqrt{2}e^{2\pi i/3}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \end{pmatrix}.$$

Izumi の結果 [3, pp. 165] を利用すると,

$$\begin{aligned} W(\tau_4) &= 1^* S_2^* \rho(T_i) T_j \\ &= S_2^* \{r_{3i} \rho(S_3) + r_{4i} \rho(S_4)\} (r_{3j} S_3 + r_{4j} S_4) \\ &= r_{3i} r_{3j} \cdot \frac{c_1}{\sqrt{2}} + r_{3i} r_{4j} \cdot \left(-\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right) + r_{4i} r_{3j} \cdot \frac{c_1}{\sqrt{2}} + r_{4i} r_{4j} \cdot \frac{c_1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{c_1}{\sqrt{2}} (r_{3i} r_{3j} - r_{3i} r_{4j} + r_{4i} r_{3j} + r_{4i} r_{4j}) \end{aligned}$$

となるので, 以下のように場合分けをする.

$T_i = T_3, T_j = T_3$ のとき

$$\begin{aligned} W(\tau_4) &= \frac{c_1}{\sqrt{2}} (r_{33}^2 + r_{43}^2) \\ &= \frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \left(\frac{-e^{\pi i/6}}{3+\sqrt{3}} + \frac{-e^{\pi i/6} + 2 - 2\sqrt{2}e^{7\pi i/12}}{3+\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{3+\sqrt{3}} \cdot (-2e^{-2\pi i/3} + 2e^{-5\pi i/6} - 2\sqrt{2}e^{-\pi i/4}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} \{ -(-1-\sqrt{3}i) + (-\sqrt{3}-i) - 2(1-i) \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} (-1-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} (1+\sqrt{3})(-1+i) \\ &= \frac{e^{3\pi i/4}}{\sqrt{3}\sqrt{\mu}}. \end{aligned}$$

$T_i = T_3, T_j = T_4$ のとき

$$\begin{aligned} W(\tau_4) &= \frac{c_1}{\sqrt{2}} (r_{33} r_{34} - r_{33} r_{44} + r_{43} r_{34} + r_{43} r_{44}) \\ &= \frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \{ -e^{\pi i/6} - (e^{\pi i/6} - \sqrt{2}e^{\pi i/4}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (e^{\pi i/6} + \sqrt{2}e^{7\pi i/12}) + (-e^{\pi i/6} + 2e^{2\pi i/3} - \sqrt{2}e^{11\pi i/12}) \} \\
= & \frac{e^{-5\pi i/6}}{2\sqrt{3}\sqrt{\mu}} \left\{ -2e^{\pi i/6} + \sqrt{2}e^{\pi i/4} \right. \\
& \left. + 2e^{2\pi i/3} + \sqrt{2}e^{\pi i/4}(e^{\pi i/3} + e^{-\pi i/3}) \right\} \\
= & \frac{e^{-5\pi i/6}}{2\sqrt{3}\sqrt{\mu}} \left\{ -(\sqrt{3} + i) + (1 + i) + (-1 + \sqrt{3}i) + (1 + i) \right\} \\
= & \frac{e^{-5\pi i/6}}{2\sqrt{3}\sqrt{\mu}} (1 + i - \sqrt{3} + \sqrt{3}i) \\
= & \frac{e^{-5\pi i/6}}{2\sqrt{3}\sqrt{\mu}} (1 + \sqrt{3}i)(1 + i) \\
= & \frac{e^{-5\pi i/6} \cdot 2\sqrt{2}e^{(1/3+1/4)\pi i}}{2\sqrt{3}\sqrt{\mu}} \\
= & \frac{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}}{\sqrt{3}\sqrt{\mu}}.
\end{aligned}$$

$T_i = T_4, T_j = T_3$ のとき

$$\begin{aligned}
W(\tau_4) &= \frac{c_1}{\sqrt{2}} (r_{34}r_{33} - r_{34}r_{43} + r_{44}r_{33} + r_{44}r_{43}) \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ -e^{\pi i/6} - (e^{\pi i/6} + \sqrt{2}e^{7\pi i/12}) \right. \\
&\quad \left. + (e^{\pi i/6} - \sqrt{2}e^{\pi i/4}) + (-e^{\pi i/6} + 2e^{2\pi i/3} - \sqrt{2}e^{11\pi i/12}) \right\} \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{2\sqrt{3}} \left\{ -2e^{\pi i/6} - \sqrt{2}e^{\pi i/4}(e^{\pi i/3} + e^{2\pi i/3}) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2}e^{\pi i/4} + 2e^{2\pi i/3} \right\} \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{2\sqrt{3}} \left\{ -(\sqrt{3} + i) - (1 + i)(\sqrt{3}i) - (1 + i) + (-1 + \sqrt{3}i) \right\} \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{2\sqrt{3}} \{ 2(-1 - i) \} \\
&= \frac{\sqrt{2}e^{(-5/6+5/4)\pi i}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{2}e^{5\pi i/12}}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$T_i = T_4, T_j = T_4$ のとき

$$\begin{aligned}
W(\tau_4) &= \frac{c_1}{\sqrt{2}}(r_{34}^2 + r_{44}^2) \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{3-\sqrt{3}} \left\{ -e^{\pi i/6} + (-e^{\pi i/6} - 2e^{\pi i/3} + 2\sqrt{2}e^{\pi i/4}) \right\} \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{3-\sqrt{3}} (-2e^{\pi i/6} - 2e^{\pi i/3} + 2\sqrt{2}e^{\pi i/4}) \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{3-\sqrt{3}} \left\{ -(\sqrt{3}+i) - (1+\sqrt{3}i) + 2(1+i) \right\} \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{(-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} (1+i-\sqrt{3}-\sqrt{3}i) \\
&= \frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{(-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} (1+i)(1-\sqrt{3}) \\
&= -\frac{e^{-5\pi i/6}}{\sqrt{2}\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\sqrt{2}e^{\pi i/4}}{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{e^{-7\pi i/12}}{\sqrt{3}\sqrt{\mu}} = \frac{e^{5\pi i/12}}{\sqrt{3}\sqrt{\mu}}.
\end{aligned}$$

3.2.2 $6j$ -記号の計算例 (その2)

次に, ⑦の場合, 即ち,

$$W(\tau_7) = W(\rho, \rho, \rho, 1, \rho, \rho | T_i, S_1, T_j, S_1)$$

の場合をしてみる. S_i ($i = 3, 4$) の変換行列として, 先程の R とその成分の複素共役を取った行列

$$R^* = \begin{pmatrix} r_{33}^* & R_{34}^* \\ r_{43}^* & R_{44}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-e^{-7\pi i/12}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{-e^{-7\pi i/12}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ \frac{e^{-7\pi i/12}-\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{e^{-7\pi i/12}-\sqrt{2}e^{-2\pi i/3}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \end{pmatrix}$$

を使い, 再び Izumi の結果 [3, pp. 165] を利用すると,

$$\begin{aligned}
W(\tau_7) &= S_1^* T_i^* \rho(T_j) S_1 \\
&= S_1^* (r_{3i}^* S_3^* + r_{4i}^* S_4^*) \{ r_{3j} \rho(S_3) + r_{4j} \rho(S_4) \} S_1 \\
&= r_{3i}^* r_{3j} S_1^* S_3^* \rho(S_3) S_1 + r_{3i}^* r_{4j} S_1^* S_3^* \rho(S_4) S_1 \\
&\quad + r_{4i}^* r_{3j} S_1^* S_4^* \rho(S_3) S_1 + r_{4i}^* r_{4j} S_1^* S_4^* \rho(S_4) S_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_{3i}^* r_{3j} c_2 + r_{3i}^* r_{4j} c_2 i + r_{4i}^* r_{3j} c_2 + r_{4i}^* r_{4j} (-c_2 i) \\
&= c_2 (r_{3i}^* r_{3j} + r_{3i}^* r_{4j} i + r_{4i}^* r_{3j} - r_{4i}^* r_{4j} i).
\end{aligned}$$

先程の例と同様に場合分けをする.

$T_i = T_3, T_j = T_3$ のとき

$$\begin{aligned}
W(\tau_7) &= c_2 (r_{33}^* r_{33} + r_{33}^* r_{43} i + r_{43}^* r_{33} - r_{43}^* r_{43} i) \\
&= \frac{c_2}{3 + \sqrt{3}} \left\{ 1 + (-1 + \sqrt{2} e^{-7\pi i/12}) i \right. \\
&\quad \left. + (-1 + \sqrt{2} e^{7\pi i/12}) - (2 + \sqrt{3}) i \right\} \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})} (-3i + \sqrt{2} e^{-\pi i/12} + \sqrt{2} e^{7\pi i/12} - \sqrt{3} i) \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})} \left\{ -3i - \sqrt{3} i + \sqrt{2} e^{\pi i/4} (e^{-\pi i/3} + e^{\pi i/3}) \right\} \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} (-3i - \sqrt{3} i + 1 + i) \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} \cdot \frac{(1 + i)(\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3} i)}{-2} \\
&= -\frac{e^{(7/12+1/4+1/3)\pi i}}{\sqrt{3}} = \frac{e^{\pi i/6}}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$T_i = T_3, T_j = T_4$ のとき

$$\begin{aligned}
W(\tau_7) &= c_2 (r_{33}^* r_{34} + r_{33}^* r_{44} i + r_{43}^* r_{33} - r_{43}^* r_{44} i) \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}} \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ 1 + (-1 + \sqrt{2} e^{\pi i/12}) i + (-1 + \sqrt{2} e^{7\pi i/12}) - (-1) i \right\} \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} 2\sqrt{2} e^{\pi i/12} \\
&= \frac{2}{\sqrt{6}} e^{7\pi i/6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e^{-5\pi i/6}.
\end{aligned}$$

$T_i = T_4, T_j = T_3$ のとき

$$\begin{aligned}
W(\tau_7) &= c_2 (r_{34}^* r_{33} + r_{34}^* r_{43} i + r_{44}^* r_{33} - r_{44}^* r_{43} i) \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ 1 + (-1 + \sqrt{2}e^{-7\pi/12})i + (-1 + \sqrt{2}e^{-\pi i/12}) - (-1)i \right\} \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} 2\sqrt{2}e^{-\pi i/12} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i.
\end{aligned}$$

$T_i = T_4, T_j = T_4$ のとき

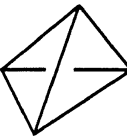
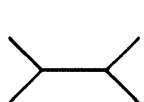
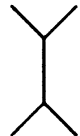
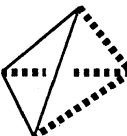
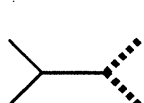
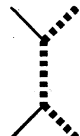
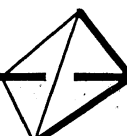
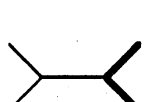

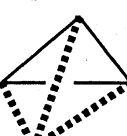


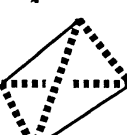

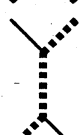
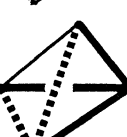



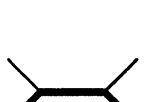



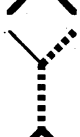

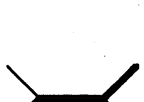




$$\begin{aligned}
W(\tau_7) &= c_2(r_{34}^*r_{34} + r_{34}^*r_{44}i + r_{44}^*r_{34} - r_{44}^*r_{44}i) \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3 - \sqrt{3}} \\
&\quad \times \left\{ 1 + (-1 + \sqrt{2}e^{\pi i/12})i + (-1 + \sqrt{2}e^{-\pi i/12}) - (2 - \sqrt{3})i \right\} \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3 - \sqrt{3}} \left\{ -3i + \sqrt{3}i + \sqrt{2}e^{\pi i/4}(e^{\pi i/3} + e^{-\pi i/3}) \right\} \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} (1 - 2i + \sqrt{3}i) \\
&= \frac{e^{7\pi i/12}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} \frac{(1 + i)(1 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - 1)}{2} \\
&= \frac{e^{(7/12 + 1/4 - 1/3)\pi i}}{\sqrt{3}} = \frac{i}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

4 研究課題

前節でみたように、インタートワイナー空間を含む場合の $6j$ -記号の値は、基底の与え方により変化し、その与え方によっては、葉広の構成した双対グラフの間の関係式を説明できることがわかった。しかしながら、すべての双対グラフの間の関係式を説明できるような、基底がみつかったわけではない。このことを含めて3角形分割の立場から、ハンドル分解による葉広の3次元多様体不変量の計算法を証明するために、さらに必要となる課題について考えよう。

4.1 インタートワイナー空間の向き

今まで議論をしなかったが、定義によりインタートワイナー空間達の間には、3次対称群 S_3 の作用がある。構造定数 N_{XY}^Z がインタートワイ

τ	$W(\tau)$		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		

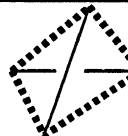

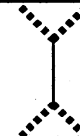
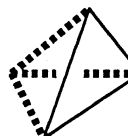
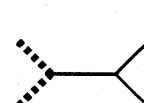
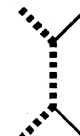
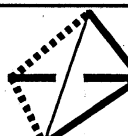
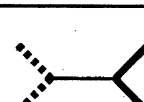

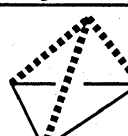
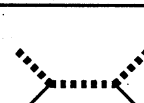

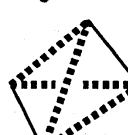

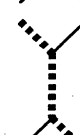






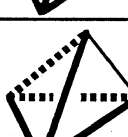








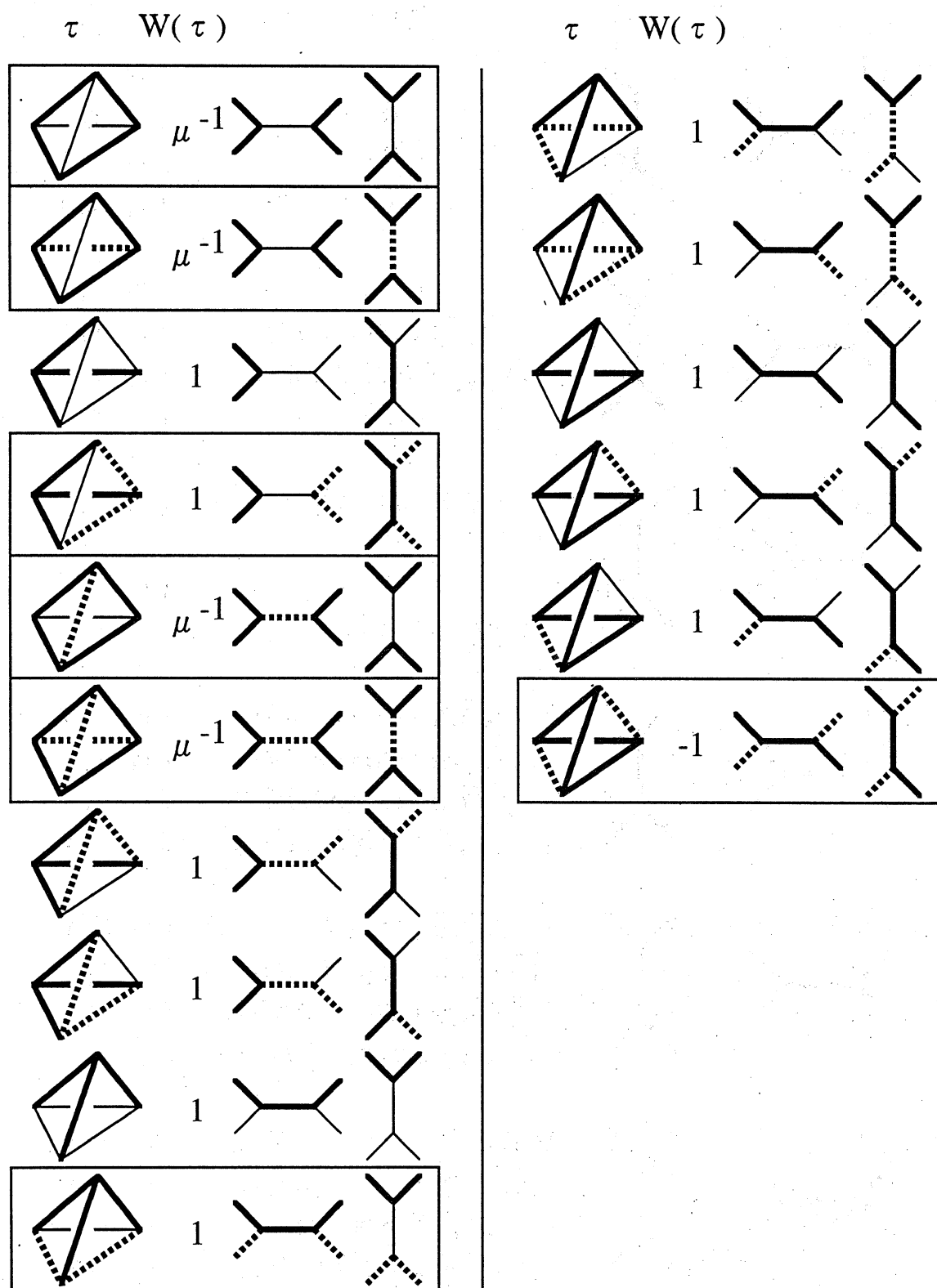
τ	$W(\tau)$		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
	-1		

図 5: $6j$ の計算 (その 1)

図 6: $6j$ の計算 (その 2)

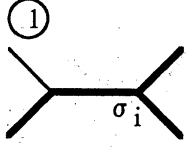

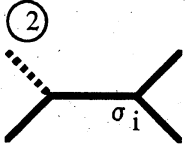

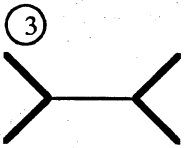
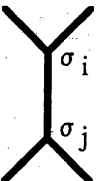
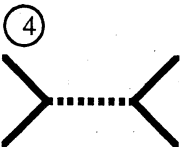
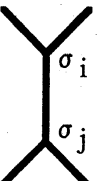
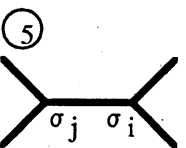

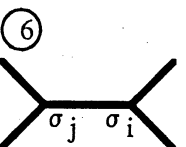
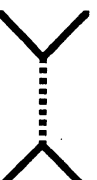
τ	$W(\tau)$	$(\sigma_i \sigma_j)$
①  	1 0 0 1	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
②  	$-1/\sqrt{3}$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \exp(2\pi i/3)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \exp(-2\pi i/3)$ $1/\sqrt{3}$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
③  	$(1/\sqrt{\mu}) \exp(-\pi i/4)$ 0 0 $(1/\sqrt{\mu}) \exp(5\pi i/12)$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
④  	$(-1/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(-\pi i/4)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(-\pi i/4)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(5\pi i/12)$ $(1/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(5\pi i/12)$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
⑤  	$(-1/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(-11\pi i/12)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(-11\pi i/12)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(-11\pi i/12)$ $(1/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(-11\pi i/12)$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
⑥  	$(-1/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(7\pi i/12)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(-3\pi i/4)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(-\pi i/12)$ $(1/\sqrt{3}\sqrt{\mu}) \exp(7\pi i/12)$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$

図 7: $6j$ の計算 (その 3)

τ		$W(\tau)$	$(\sigma_i \sigma_j)$
(7)		$(-1/\sqrt{3}) \exp(-5\pi i/6)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \exp(-5\pi i/6)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \exp(\pi i/2)$ $(1/\sqrt{3}) \exp(\pi i/2)$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
(8)		$(-1/\sqrt{3}) \exp(-\pi i/3)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \exp(\pi i/3)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \exp(\pi i/3)$ $-1/\sqrt{3}$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
(9)		1 0 0 1	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
(10)		$-1/\sqrt{3}$ $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
(11)		1 0 0 1	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
(12)		$1/\sqrt{3}$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \exp(\pi i/3)$ $(\sqrt{2}/\sqrt{3}) \exp(-\pi i/3)$ $-1/\sqrt{3}$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$

図 8: $6j$ の計算 (その 4)

(13)	τ	$W(\tau)$	$(\sigma_i \sigma_j)$
		$2/3\mu^2$ $(1/3\sqrt{2})\exp(-2\pi i/3)$ $(-2+\sqrt{3}-\sqrt{3}i)/3\sqrt{2}\mu$ $-1/3\mu$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
		$(\sqrt{2}/3\mu^2)\exp(-\pi i/3)$ $(2-\sqrt{3})/3\mu$ $(2+\sqrt{3}-\sqrt{3}i)/3\mu^2$ $(\sqrt{2}/3\mu)\exp(2\pi i/3)$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
		$(-2+\sqrt{3}+\sqrt{3}i)/3\sqrt{2}\mu$ $(1/3\mu)\exp(-\pi i/3)$ $-1/3\mu$ $(2\sqrt{2}/3\mu^2)\exp(\pi i/3)$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$
		$(-2+\sqrt{3}-3i)/6\mu$ $(\sqrt{2}/3\mu)\exp(-2\pi i/3)$ $(\sqrt{2}/3\mu)\exp(2\pi i/3)$ $-2/3\mu$	$(T_3 T_3)$ $(T_3 T_4)$ $(T_4 T_3)$ $(T_4 T_4)$

図 9: $6j$ の計算 (その 5)

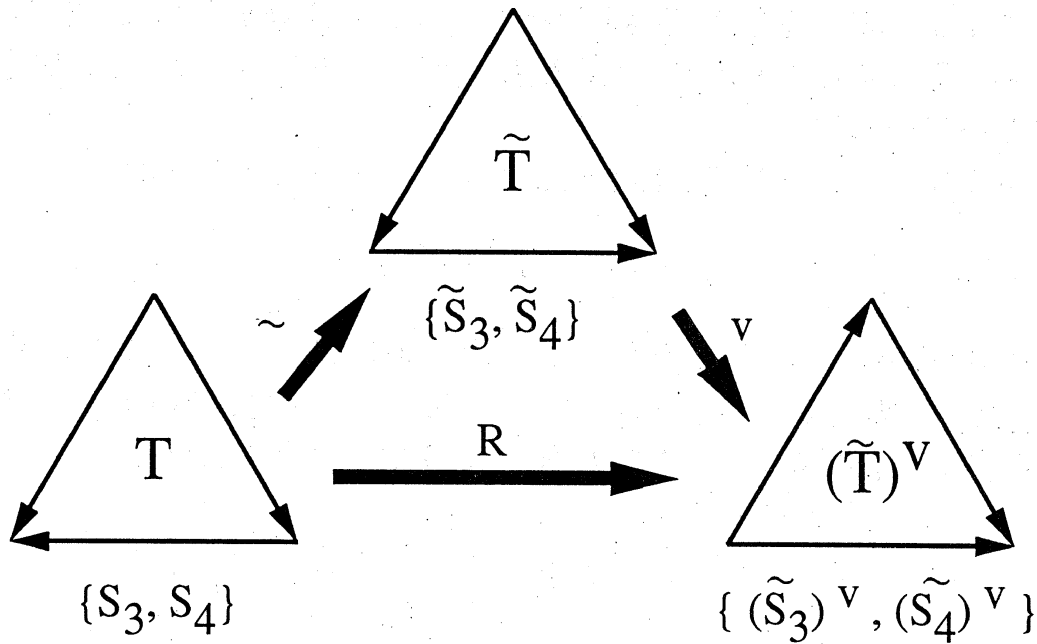


図 10: インタートワイナー空間の間の同型

ナー空間 \mathcal{H}_{XY}^Z を与えるとする、 S_3 は、次の空間の間の同型写像を定める。

$$\mathcal{H}_{XY}^Z, \mathcal{H}_{ZX}^Y, \mathcal{H}_{YZ}^X, \mathcal{H}_{YX}^Z, \mathcal{H}_{XZ}^Y, \mathcal{H}_{ZY}^X.$$

E_6 から構成される $6j$ -記号の場合、インタートワイナー空間を与える 3 角形の辺のカラーはすべて ρ であり、 $\bar{\rho} = \rho$ なので、上記の同型は自己同型となる。双対グラフの場合、 ρ の集まる頂点の間に自己同型があり、図 7 から図 9 で示した頂点と葉広の定義に現れる頂点は、同じグラフで表されていても、この自己同型を加味しないまま同一視することは出来ない。自己同型写像については、和久井の報告 [7] に書いてあるデータを用いて図 7 から図 9 の計算をやりなおす必要がある。

図 7 から図 9 において、①, ⑨, ⑩ はカラー 1 の載っている辺とその端点の頂点を無視すると、グラフの全同位を記述しているが、これはたまたま葉広の定義の頂点との間の自己同型が恒等写像になっていた例である。また、⑩ と ② も葉広の定義の頂点と一致している。しかし、② は葉広の定義の頂点と一致しているにも関わらず、 $6j$ -記号の値は一致しない。これは 3.2 で採用した基底の取り方も完全なものではないためである。

4.2 基底の取り方の補正

3節で Izumi[3]の基底の変換を行ったが、この変換がどのように補正できるか、詳しくみてみよう。この変換の導入にあたっては、4.1の議論が元になっている。

図 10の3つの3角形はどれも同じインタートワイナー空間

$$T = \tilde{T} = \tilde{T}^\vee = \mathcal{H}_{\rho\rho}^\rho$$

を与えているが、これらの空間には3次対称群 S_3 の作用があり、基底 $\{S_3, S_4\}$ は、それぞれ、 $\{\tilde{S}_3, \tilde{S}_4\}$, $\{(\tilde{S}_3)^\vee, (\tilde{S}_4)^\vee\}$ に移されるものとする。

基底 $\{S_3, S_4\}$ に関して、1次変換 \sim, \vee は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_3 & \tilde{S}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_3 & S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{5\pi i/6} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{5\pi i/6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{5\pi i/6} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{5\pi i/6} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} S_3^\vee & S_4^\vee \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_3 & S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\pi i/4} & 0 \\ 0 & e^{\pi i/4} \end{pmatrix}.$$

従って、 $\{R(S_3), R(S_4)\}$ をこの順番で合成したものとすると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R(S_3) & R(S_4) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\tilde{S}_3)^\vee & (\tilde{S}_4)^\vee \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_3 & S_4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{7\pi i/12} & e^{7\pi i/12} \\ -e^{\pi i/12} & e^{\pi i/12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 \tilde{T}^\vee は T を $e^{2\pi i/3}$ 回転した図形になっている。この行列の固有値は1と $\omega = e^{2\pi i/3}$ であり、固有ベクトルをそれぞれ、 v_1, v_ω と書くことにすると、

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-e^{7\pi i/12}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \\ \frac{e^{7\pi i/12}-\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} \end{pmatrix}, \quad v_\omega = \begin{pmatrix} \frac{-e^{7\pi i/12}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ \frac{e^{7\pi i/12}-\sqrt{2}e^{2\pi i/3}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} T_3 & T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_3 & S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-e^{7\pi i/12}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{-e^{7\pi i/12}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \\ \frac{e^{7\pi i/12}-\sqrt{2}}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{e^{7\pi i/12}-\sqrt{2}e^{2\pi i/3}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} \end{pmatrix}$$

と定めれば、

$$\begin{pmatrix} R(T_3) & R(T_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_3 & \omega T_4 \end{pmatrix}$$

となり、葉広の定義で用いられた基底と同じ性質を持つ。

3節の基底の変換は上記の考察のもとに行った。しかしながら、固有ベクトルの選び方には、スカラー倍の自由度があり、その選び方によって $6j$ -記号の値が変わる。実際、4.1で見たように、インタートワイナー空間の向きを考えても葉広の定義とは異なる値が出て来てしまうことがあるので、固有ベクトルの選び方を工夫する必要がある。

4.3 カラー1の辺を無視することの正当性

岡本-佐藤の報告[5]にある葉広の定義では、1のカラーのついた辺を無視して計算して良いことになっている。このことは、前節で1のカラーのついた辺を含むグラフの特徴として述べたが、インタートワイナー空間を含む場合に、4.1, 4.2で述べた補正を行い、カラー1を持つ辺を含む $6j$ -記号の関係式をチェックした上で、厳密な意味での証明を与える必要がある。

1のカラーのついた辺を無視できることが示せれば、これを利用して輪で与えられるグラフにカラー1のついた3つの辺を書き加えることで、4面体を作り、それに対応する $6j$ -記号の値をカラーの付いた輪の値と定めれば、2節で議論したように、ハンドル体に対してスカラー量が求まる。

4.4 種数の少ないハンドル体上のグラフとの関係式

2節で議論したように、種数 g と種数 $g-1$ のハンドル体の表面の双対グラフとの間の関係式が与えられれば、最後には、球面上の双対グラフを考えればよいことになる。既に、葉広はこの点についても関係式も得られることを主張しているが、3角形分割に基づく定義からこの関係式の証明については、まだ得られていない。

参考文献

- [1] P. Defiovanni, Moore and Seiberg's equations and 3D topological field theory, *Comm. Math. Phys.*, **145** (1992), 409–505.
- [2] D. E. Evans and Y. Kawahigashi, “Quantum symmetries on operator algebras”, Oxford University Press, 1998.
- [3] M. Izumi, Subalgebras of infinite C^* -algebras with finite Watatani indices I. Cuntz algebras, *Comm. Math. Phys.*, **155** (1993), 157–182.

- [4] V. G. Turaev and O. Ya. Viro, State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols, *Topology.*, **31** (1992), 865–902.
- [5] 岡本 美雪, 佐藤 智史, TQFT の立場から見た Turaev-Viro-Ocneanu 不変量とその計算例, 本講究録
- [6] 鈴木 幸太郎, 三次元球面 S^3 , レンズ空間 $L(2, 1)$, $L(3, 1)$ の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量の計算, 本講究録
- [7] 和久井 道久, コクセターグラフ E_6 の量子 6j 記号から作られる 3次元多様体の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量について, 本講究録